

מכינה למחלקה למתמטיקה

פרק 2 - חזרה כללית - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1	1. משוואות ממעלת ראשונה.
3	2. מערכת שתי משוואות בשני גורמים ממעלת ראשונה
6	3. משוואות עם אינסוף פתרונות ולא פתרון
7	4. משוואה ממעלת שנייה.
9	5. משוואות דו-ריבועיות
11	6. משוואות עם פרמטרים
13	7. משוואות עם שורשים
15	8. משוואות עם ערך מוחלט
16	9. מערכת משוואות ממעלת שנייה
18	10. משוואות מתקדמות מסכומות
21	11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלת שלישית

משואה ממעלת ראשונה:

סיכום כללי:

משואה ממעלת ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משואה ממעלת ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגרים אם ישנים.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומוציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתר את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלת ראשונה):

ב. $7 - 2x = 7$

א. $6x + 2 = 8$

ד. $2x + 6 = 8 + x$

ג. $2x + x = 24$

ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$

ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$

ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$

ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$

2) פתר את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגרים):

ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$

א. $3(x - 1) - 4 = 2$

ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$

ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$

ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$

ח. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$

(3) פתר את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי) :

$$\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 \quad \text{א.}$$

$$\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} \quad \text{ג.}$$

$$5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1 \quad \text{ו.}$$

$$\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 \quad \text{ז.}$$

(4) פתר את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה) :

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 \quad \text{א.}$$

$$\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \quad \text{ט.}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} \quad \text{ז.}$$

(5) פתר את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים) :

$$\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} \quad \text{א.}$$

$$\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12 \quad \text{ט.}$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

$$x=-3 \quad \text{ו.} \quad x=2 \quad \text{ט.} \quad x=2 \quad \text{ט.} \quad x=8 \quad \text{ג.} \quad x=0 \quad \text{ב.} \quad x=1 \quad \text{א.} \quad \text{(1)}$$

$$\cdot x=4 \quad \text{ט.} \quad x=\frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

$$\cdot x=-1 \quad \text{ו.} \quad x=4 \quad \text{ט.} \quad x=1 \quad \text{ט.} \quad x=2\frac{1}{4} \quad \text{ג.} \quad x=\frac{1}{2} \quad \text{ב.} \quad x=3 \quad \text{א.} \quad \text{(2)}$$

$$\cdot x=-21 \quad \text{ו.} \quad x=-10 \quad \text{ט.} \quad x=1 \quad \text{ט.} \quad x=-1 \quad \text{ג.} \quad x=-30 \quad \text{ב.} \quad x=-18 \quad \text{א.} \quad \text{(3)}$$

$$\cdot x=\frac{1}{2} \quad \text{ו.} \quad x=2 \quad \text{ט.} \quad x=-2 \quad \text{ט.} \quad x=-3 \quad \text{ג.} \quad x=-1 \quad \text{ב.} \quad x=8 \quad \text{א.} \quad \text{(4)}$$

$$\cdot x=6, x \neq 3 \quad \text{ט.} \quad x=-7 \quad \text{ג.} \quad x=-7 \quad \text{ב.} \quad x=-6 \quad \text{א.} \quad \text{(5)}$$

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (LINIAR) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, c_1, b_1, a_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

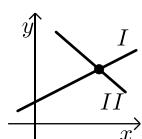
דוגמאות למערכות של משוואות:
 $\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y+6 \end{cases}, \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדרה המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

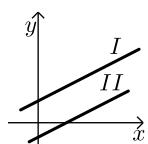
הציגת גרפית של מערכת משוואות:

פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.
 יתכונו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



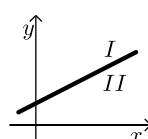
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרונות אלגברי של מערכת משוואות:

- **פתרונות ע''י שיטת הצבה:**
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואת אחת ונציב אותו במשוואת השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- **פתרונות ע''י השוואת מקדמים:**
 1. כופלים (או מחלקים) משוואת אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדים או זהים עבור אחד המשתנים.
 2. מוחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואת חדשה עם נעלם אחד.
 3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואת החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

noch להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע''י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שcolaה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:**(1) פתרו את המשוואות הבאות:**

$$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} . \text{ג.}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} . \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} . \text{א.}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} . \text{ו.}$$

$$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} . \text{ה.}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} . \text{ט.}$$

(2) פתרו את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} . \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} . \text{א.}$$

$$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} . \text{ט.}$$

$$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} . \text{ג.}$$

(3) פתרו את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases} . \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} . \text{א.}$$

(4) פתר את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} . \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} . \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} . \text{ג.}$$

(5) פתר את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} . \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} . \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} . \text{א.}$$

(6) פתר את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} . \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} . \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} . \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

- .(-2,3) .**1** (1,-3) .**2** (0,1) .**3** (4,-2) .**4** (-7,-10) .**5** (2,5) .**6** (2,5) .**1**
 .(-2,7) .**7** (4,1.6) .**8** $\left(-\frac{4}{5}, 9\right)$.**9** $\left(4, \frac{1}{3}\right)$.**2**
 .**3** א. אין פתרון. ב. אין סוף פתרונות.
 .(7,2) .**4** (7,1) .**5** (6,5) .**6**
 .(1,1) .**7** (-3,1) .**8** (1,1) .**9**
 .(-2,4) .**10** (2,10) .**11** (-1,-3) .**12**

משוואות עם אינסוף פתרונות ולא פתרון:

סיכום כללי:

משואה ממולה ראשונה:

למשואה ממולה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$
מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשואה $b = 0$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

$$3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2) \qquad x + 4 = 6 + x \quad (1)$$

$$5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4) \qquad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3)$$

$$(5) \text{ נתונה המשואה: } \square - 2(x + 2) = 5x + \square .$$

א. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5)
 - א. -8
 - ב. -1
 - ג. $-7x - 1$
 - ד. $k + 7x - 1$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

משואה ממעלת שנייה:

סיכום כללי:

משואה מהצורה : $(a \neq 0)$, $ax^2 + bx + c = 0$ נקראת משואה ריבועית.
פתרונות המשואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשואה ריבועית יתכנו שלושה סוגי של פתרונות :

1. משואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.

אם מתקיים מספר חיובי בתחום השורש שבנוסחת השורשים אז למשואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.

דוגמא : $x^2 + 5x - 4 = 0$.

2. משואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.

אם מתקיים אפס בתחום השורש שבנוסחת השורשים אז למשואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.

דוגמא : $x^2 + 4x + 4 = 0$.

3. משואה ללא פתרונות ממשיים כלל.

אם מתקיים מספר שלילי בתחום השורש שבנוסחת השורשים אז למשואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.

דוגמא : $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

1) פתר את המשוואות הבאות :

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

2) פתר את המשוואות הבאות :

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתר את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b) :

ב. $32x^2 - 18 = 0$

א. $x^2 - 36 = 0$

ד. $(2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10$

ג. $4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6$

(4) פתר את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c) :

ב. $5x^2 - x = 0$

א. $-7x^2 - 14x = 0$

ד. $(5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10$

ג. $6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2$

(5) פתר את המשוואות הבאות :

ב. $\frac{x^2 - 9}{x+3} + x = x^2 - 18$

א. $\frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x}$

ד. $\frac{x}{2x^2 - 72} + \frac{2}{x^2 + 12x + 36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2$

ג. $\frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0$

תשובות סופיות:

ד. אין פתרון. ג. $x = \frac{2}{5}$ ב. $x_1 = 2, x_2 = 8$ א. $x_1 = 2, x_2 = -5$ (1)

ג. $x_1 = 1, x_2 = -10$ ב. $x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4}$ א. $x_1 = 2, x_2 = -1$ (2)

ג. $x_1 = 0.6, x_2 = -2$ ב.

ד. $x = \pm 1$ ב. $x = \pm 3$ ג. $x = \pm \frac{3}{4}$ א. $x = \pm 6$ (3)

ג. $x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6}$ ב. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$ א. $x_1 = 0, x_2 = -2$ (4)

ג. $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$ ב.

ד. $x_1 = 0, x_2 = -5$ ב. $x = 5, x \neq -3$ ג. $x_1 = 2, x_2 = -1.2$ א. (5)

ג. $x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$ ב.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משואה דו-ריבועית היא משואה מהצורה $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
 פתרון המשואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
 לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משואות לצורה זו ולהציג ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4

$$\text{כגון: } t = x^2 - 1 \quad (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0 \quad \text{באמצעות פרמטר:}$$

$$\text{ובכך לפטור משוואה: } t^2 + 3t - 2 = 0 \quad \text{ולחזיר את ההצבה עבור מציאת } x.$$

דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כוגן 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad (2) \qquad 5x^4 + 3x^2 - 8 = 0 \quad (1)$$

$$x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10) \quad (4) \qquad 13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1) \quad (3)$$

$$x^3 + 4 = \frac{32}{x^3} \quad (6) \qquad x^6 + x^3 = 56 \quad (5)$$

$$x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84 \quad (8) \qquad x - 9\sqrt{x} + 14 = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0 \quad (10) \qquad 125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1) \quad (9)$$

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x \quad (12) \qquad (x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6 \quad (11)$$

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} \quad (14) \qquad \frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3} \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2} \quad (16) \qquad \frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25} \quad (15)$$

$$\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6 \quad (18) \qquad \left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right) \quad (17)$$

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24 \quad (20) \qquad (2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0 \quad (19)$$

תשובות סופיות:

$x = \pm 1$ **(1)**

$x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$ **(2)**

$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$ **(3)**

$x = \pm 2, \pm 5$ **(4)**

$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2$ **(5)**

$x = -2, \sqrt[3]{4}$ **(6)**

$x = 49$ **(7)**

$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1$ **(8)**

$x = 5, -1$ **(9)**

$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$ **(10)**

$x = -1$ **(11)**

$x_{1,2} = 1, 3$ **(12)**

$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06$ **(13)**

$x_1 = 0, x_2 = -2$ **(14)**

(15) אין פתרונות.

$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$ **(16)**

$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$ **(17)**

$x = -1, 2$ **(18)**

$x = 3, -1$ **(19)**

$x = \pm 1, 4, 6$ **(20)**

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משואה עם פרמטר הינה משואה שמכילה שני סוגי של גלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשואה.

למשל פתרון המשואה: $4 = mx$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$. אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמה הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

1) פטור את המשוואות הבאות:

$$\frac{1}{3}(a-3x) = \frac{1}{a}(ax-3) \quad \text{ב.} \quad 3x-b = (b+1)x-6 \quad \text{א.}$$

$$\frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1} \quad \text{ד.} \quad (x-2a)(x-2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ג.}$$

$$\frac{x}{a^2-a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a} - \frac{2}{a^3-2a^2+a} \quad \text{ה.}$$

2) פטור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2y = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases} \quad \text{ה.}$$

(3) פטור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{א.}$$

$$\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0 \quad \text{ד.}$$

$$x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ג.}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b \quad \text{ו.}$$

$$(m^2 + 1)x^2 - m^2 x - 1 = 0 \quad \text{ח.}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \quad \text{ז.}$$

תשובות סופיות:

$$x = a+1 \quad \text{ט.} \quad x = -m \quad \text{ט.} \quad x = a+b \quad \text{ז.} \quad x = \frac{a^2 + 9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ב.} \quad x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right) \quad \text{ב.} \quad m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$m \neq 1, -2, (2m+1, m-2) \quad \text{ט.} \quad m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ג.}$$

$$b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b) \quad \text{ט.}$$

$$x = m-5, -2m \quad \text{ז.} \quad x = a-1, 3-a \quad \text{ב.} \quad x = m+1, m-1 \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$x = 1, -\frac{1}{m^2+1} \quad \text{ט.}$$

$$a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ט.}$$

$$a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b} \quad \text{ז.}$$

$$a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ו.}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $a = \sqrt{x}$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה
 באופן הבא: $(\sqrt{x})^2 = (a)^2 \rightarrow x = a^2$

הערות:

- 1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתפללים ע"י הצבתם במשוואת המקורית.
- 2) למשוואת מהצורה $a = \sqrt{x}$ שבה $0 < a$ אין פתרון.
- 3) יש לסדר תחילה משוואות שבهن הביטוי עם שורש אינם מבודדים.
- 4) במשוואות שבهن יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילת את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\sqrt{x+2} = x \quad (2)$$

$$\sqrt{2x+5} = 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x+7} + 4 = x \quad (4)$$

$$\sqrt{3x+1} + x = 13 \quad (3)$$

$$\sqrt{10x+6} + 9 = x \quad (6)$$

$$\sqrt{x-1} + 3 = x \quad (5)$$

$$\sqrt{24-x} + 3 = 2x \quad (8)$$

$$\sqrt{x+6} - 2 = 2x \quad (7)$$

$$2x = 16 - 3\sqrt{x-1} \quad (10)$$

$$\sqrt{x+16} + 4 = 2x \quad (9)$$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x} \quad (12)$$

$$\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17} \quad (11)$$

$$\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1} \quad (14)$$

$$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2} \quad (13)$$

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2 \quad (16)$$

$$\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2 \quad (15)$$

$$\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2} \quad (18)$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1} \quad (17)$$

$$3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2} \quad (19)$$

תשובות סופיות:

$x = 2$ **(2)**

$x = 22$ **(1)**

$x = 9$ **(4)**

$x = 8$ **(3)**

$x = 25$ **(6)**

$x = 5$ **(5)**

$x = 3.75$ **(8)**

$x = 0.25$ **(7)**

$x = 5$ **(10)**

$x = 4.25$ **(9)**

$x = 4, -3$ **(12)**

$x = 6$ **(11)**

$x = 5$ **(14)**

$x = 3$ **(13)**

$x = 2, 2\frac{8}{9}$ **(16)**

$x = 12$ **(15)**

$x = 1$ **(18)**

$x = 6$ **(17)**

$x = 2$ **(19)**

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

משואה עם ערך מוחלט:

משואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.
 כדי לפתר המשואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשואה הנтונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתרו את המשוואות הבאות:

$$|3x - 24| = x \quad (2)$$

$$|3x + 14| = 7 \quad (1)$$

$$2x - |8 - x| = 10 \quad (4)$$

$$|12 - x| = 3x \quad (3)$$

$$|14 - 3x| = 2|x + 5| \quad (6)$$

$$|4x - 5| = |2x + 13| \quad (5)$$

$$|x + 2| + 6 = |2x - 4| \quad (8)$$

$$|x| + 7 = |2x| \quad (7)$$

$$|10 - 3x| - |x + 4| = |2x - 6| \quad (10)$$

$$|x + 2| + |2x - 6| = |4x + 8| \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$x = 6 \quad (4)$$

$$x = 3 \quad (3)$$

$$x = 6, 12 \quad (2)$$

$$x = -\frac{7}{3}, -7 \quad (1)$$

$$x = 12, -1\frac{1}{3} \quad (8)$$

$$x = \pm 7 \quad (7)$$

$$x = 24, \frac{4}{5} \quad (6)$$

$$x = 9, -1\frac{1}{3} \quad (5)$$

$$x = 0 \quad (10)$$

$$x = 0, -12 \quad (9)$$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועית מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועית יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכnikות הרגילים של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתרו את מערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

$(\pm 4, -2)$ **(2)**

$(2, 4), (4, 2)$ **(1)**

$(5, -2), (-5, 2)$ **(4)**

$(\pm 2, \pm 1)$ **(3)**

$\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$ **(6)**

$\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ **(5)**

$(5, -3)$ **(8)**

$(7, 4)$ **(7)**

$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ **(10)**

$\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ **(9)**

$(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$ **(12)**

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ **(11)**

$(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$ **(13)**

$(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$ **(14)**

משוואות מסכימות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכיים מוחלטים וכו').
העיקרונו הוא זיהוי התבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשווה.
סימנו התבנית במשתנה זמני ופתרונו עברו משתנה זה טוביל למשואה מוגדרת ופתירה.
לאחר מכן יש להחזיר את הצבה לבנייה המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע.
במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים.
חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשואה המקורי לפני
העלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משואה עם ערכיים מוחלטים היא ע"י פיצול המשווה לתחומיים לפי
סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבעל ערך מוחלט ומציאת
ערך הנעלם המקוריים זאת, חלוקת המשווה לתחומיים מתאימים ופתרונה בכל תחום.
יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון
של המשווה, אחרת הוא נפסל.

- משואה עם פרמטרים נפתרת בצורה רגילה (התיחסות לפרמטרים כאל קבועים
מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים
המובטאים באמצעות הפרמטרים במידה וקיימות הגבלות תחום הגדרה במשואה.

שאלות:

פתרונות את המשוואות הבאות:

$$x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 \quad (2)$$

$$x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 \quad (4)$$

$$4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 \quad (6)$$

$$x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} \quad (8)$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x \quad (7)$$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \quad (9)$$

$$\sqrt{x + \sqrt{14x-49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x-49}} = \sqrt{14} \quad (10)$$

$$\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 \quad (11)$$

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x} \quad (12)$$

פתרונות את המשוואות הבאות עבור $a > 0$:

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0 \quad (14)$$

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \quad (13)$$

פתרונות את המשוואות הבאות:

$$|4 - |5 - x|| = |x + 3| \quad (16)$$

$$|3 - |2 - x| + |x|| = 1 \quad (15)$$

$$\sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1| \quad (18)$$

$$\left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 \quad (17)$$

$$\frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0 \quad (19)$$

$$(20) \text{ הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: } \cdot \frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x| + 2$$

תשובות סופיות:

$x = 3$ **(1)**

$x_1 = 4, x_2 = -9$ **(2)**

$x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$ **(3)**

$x_1 = 1, x_2 = -4$ **(4)**

$x_{1,2} = \pm 1$ **(5)**

$x_{1,2} = \pm 2$ **(6)**

$x = 1$ **(7)**

$x = 3$ **(8)**

$x = 2$ **(9)**

$3.5 \leq x \leq 7$ **(10)**

$x = 4$ **(11)**

$x = 1, x = \frac{9}{16}$ **(12)**

$x_1 = -2a, x_2 = a$ **(13)**

$x_1 = -2a, x_2 = 3a$ **(14)**

$x \leq 0$ **(15)**

$x = -1$ **(16)**

$x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$ **(17)**

$x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$ **(18)**

$x = -\sqrt{5}$ **(19)**

(20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלת שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלת שלישית :

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פתרון בביטויים:

פשט את הביטויים הבאים :

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3 y^6 z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

משוואות בняולים אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר :

פתרו את המשוואות הבאות :

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

משוואות בняולים אחד עם פירוקים שונים:

פתרו את המשוואות הבאות :

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

מערכת משוואות:

$$\cdot \begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{(17)}$$

$$\cdot \begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{(18)}$$

תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad \text{(10)}$$

$$(2y+7)(4y^2 - 17y + 49) \quad \text{(11)}$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad \text{(12)}$$

$$8mn^4(2-mn)(4+2mn+m^2n^2) \quad \text{(13)}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad \text{(14)}$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad \text{(1)}$$

$$(2x-1)(4x^2 + 2x + 1) \quad \text{(2)}$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad \text{(3)}$$

$$8(1+2x^4)(1-2x^4+4x^8) \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{x+2} \quad \text{(5)}$$

$$x = \frac{1}{\square} \quad \text{(15)}$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad \text{(16)}$$

$$x = 4 \quad \text{(6)}$$

$$x = 3 \quad \text{(7)}$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad \text{(17)}$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad \text{(8)}$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad \text{(18)}$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad \text{(9)}$$